23/4/2020 | 1o online μάθημα

Το "Θεώρημα Σταθερού σημείου του Banach" ή "Αρχή Συστολής του Banach"

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $f: X \to X$ μια συνάρτηση. Η f λέγεται συνάρτηση συστολής (ή απλά συστολή) αν υπάρχει c με $0 \le c < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \le c\rho(x,y)$ $\forall x,y \in X$.

Παρατήρηση: Μια συνάρτηση συστολής ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής άρα συνεχής.

Το Θεώρημα Σταθερού σημείου είναι ένα ενδιαφέρον και χρήσιμο θεώρημα με πολλές εφαρμογές στη Θεωρητική αλλά και την Εφαρμοσμένη Ανάλυση.

Θεώρημα: Έστω (X,ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $f: X \to X$ μια συνάρτηση συστολής. Τότε η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο δηλαδή υπάρχει μοναδικό $a \in X$ ώστε $f(a)=a$

Απόδειξη: Έστω c με $0 \le c < 1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) \le c\rho(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$

Μοναδικότητα: Αν a, b σταθερά σημεία της f, δηλαδή $f(a)=a$ και $f(b)=b$. Τότε $\rho(a,b) = \rho(f(a), f(b)) \le c\rho(a,b)$

Αν είχαμε $a \ne b$ τότε $\rho(a,b) > 0$ και από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι $1 \le c$ άτοπο. Άρα $a=b$

Ύπαρξη: Επιλέγουμε τυχαίο $x \in X$ και ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ως εξής:

$x_1 = x$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Παρατηρούμε ότι για $n \ge 2$ έχουμε

$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \le c^{n-1}\rho(x_n, x_{n-1})$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή προκύπτει ότι

$\rho(x_{n+1}, x_n) \le c\rho(f(x), x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς για $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$ έχουμε

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n)$$
$$\leq c^{m-2}\rho(f(x), x) + c^{m-3}\rho(f(x), x) + \dots + c^{n-1}\rho(f(x), x)$$
$$= \left(c^{m-2} + c^{m-3} + \dots + c^{n-1}\right)\rho(f(x), x)$$
$$= c^{n-1}\left(1 + c + c^2 + \dots + c^{m-n-1}\right)\rho(f(x), x)$$
$$\leq c^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c^k\right)\rho(f(x), x) = \frac{c^{n-1}}{1-c}\rho(f(x), x)$$

Εφόσον $c^n \to 0$ (διότι $0 \leq c \leq 1$)
προκύπτει ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.
Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$.
Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{c^n}{1-c}\rho(f(x), x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $m > n \geq n_0$.
Εφόσον ο χώρος (X, ρ) είναι πλήρης υπάρχει $a \in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} a$.
Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως συνάρτηση συστολής) από την αρχή μεταφοράς προκύπτει $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$
δηλαδή $x_{n+1} \xrightarrow{\rho} f(a)$
Όμως εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} a$ θα έχουμε $x_{n+1} \xrightarrow{\rho} a$
Έτσι συμπεραίναμε ότι $f(a) = a$ δηλαδή ότι το a είναι σταθερό σημείο της f.

Παρατηρήσεις: α) Στην παραπάνω απόδειξη δεν παίζει ρόλο το αρχικό σημείο x που επιλέχθηκε για τον ορισμό της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ήταν τυχαία η επιλογή
β) $\rho(x_m, x_n) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c}\rho(f(x), x)$ για $m > n$.

Κρατώντας σταθερό το n και παίρνοντας όριο για $m \to \infty$ προκύπτει ότι $\rho(a, x_n) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c}\rho(f(x), x)$

Αυτή η σχέση δείχνει την ταχύτητα σύγκλισης της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο a.

γ) Αν εξασθενίσουμε την υπόθεση ότι η f είναι συνάρτηση συστολής υποθέτοντας απλώς ότι $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y)$ $\forall x,y \in X$ με $x \neq y$ τότε ⇝ Η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο

⇝ Η f ενδέχεται να μην έχει κανένα σταθερό σημείο.

π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \log(1+e^x)$ τότε

$|f(x) - f(y)| < |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$.

ενώ η f δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.

δ) Η υπόθεση ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης δεν μπορεί να παραληφθεί στο Θεώρημα.

Το Θεώρημα του Baire που θα αναφέρουμε παρακάτω έχει ευρύτατες εφαρμογές σε όλους τους κλάδους της Ανάλυσης.
Πριν το διατυπώσουμε και το αποδείξουμε θα κάνουμε κάποια υπενθύμιση και κάποιες παρατηρήσεις.

Υπενθύμιση: Αν (X,ρ) μ.χ. και $D \subseteq X$ το D είναι πυκνό αν-ν τέμνει κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο δηλαδή αν $D \cap U \neq \emptyset$ δηλαδή αν $D \cap U \neq \emptyset$ για κάθε U ανοικτό μη κενό υποσύνολο του X.

Παρατηρήσεις: α) Αν G_1, G_2 δύο ανοικτά και πυκνά υποσύνολα ενός μ.χ. (X, ρ) είναι το $G_1 \cap G_2$ (ανοικτό και) πυκνό
ΝΑΙ: το $G_1 \cap G_2$ είναι ανοικτό (ως τομή δύο ανοικτών)
Δείχνουμε ότι είναι πυκνό (χρησιμοποιώντας την παραπάνω υπενθύμιση)
Έστω $U \neq \emptyset$ ανοικτό. Τότε $G_2 \cap U \neq \emptyset$ (διότι το G_2 είναι πυκνό) και το $G_2 \cap U$ είναι ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών. Εφόσον το G_1 είναι πυκνό προκύπτει ότι $G_1 \cap (G_2 \cap U) \neq \emptyset$ ή ισοδύναμα $(G_1 \cap G_2) \cap U \neq \emptyset$. Επομένως το $G_1 \cap G_2$ είναι πυκνό (εφόσον τέμνει κάθε ανοικτό μη κενό υποσύνολο U του X)
β) Χρησιμοποιώντας επαγωγή προκύπτει άμεσα από το α) ότι αν $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ανοικτά και πυκνά τότε το $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ είναι

(ανοικτο και) πυκνο.

Το ερωτημα που τιθεται φυσιολογικα ειναι το εξής:
Αν $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθια από ανοικτά και πυκνά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ειναι πυκνο;

Η απάντηση γενικά ειναι αρνητική.

Το Θεώρημα του Baire μας λέει ότι η απάντηση ειναι καταφατική όταν ο μ.χ. ειναι πλήρης.

Θεώρημα (Baire): Αν (X,ρ) ειναι πλήρης μ.χ. και $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι μια ακολουθια από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ειναι πυκνό.

Σκιαγράφηση της απόδειξης: Όπως προαναφέραμε για να δείξουμε ότι ένα σύνολο ειναι πυκνό αρκεί να δείξουμε ότι τέμνει κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο. Έστω $U\neq\emptyset$ ανοικτό.
Θ.δ.ο. $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)\cap U\neq\emptyset$. Εφόσον το G_1 ειναι πυκνό ισχύει

$G_1\cap U\neq\emptyset$. Έστω $x_1\in G_1\cap U$. Τότε υπάρχει $\varepsilon_1>0$ ώστε $\hat{B}_\rho(x_1,\varepsilon_1)\subseteq G_1\cap U$. Εφόσον το σύνολο G_2 είναι πυκνό και το σύνολο $B_\rho(x_1,\varepsilon_1)$ είναι ανοικτό μη κενό ισχύει $B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\cap G_2\neq\emptyset$. Έστω $x_2\in B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\cap G_2$. Εφόσον το $B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\cap G$ είναι ανοικτό μπορούμε να επιλέξουμε $\varepsilon_2>0$ με $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1/2$ ώστε $\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq B_\rho(x_1,\varepsilon_1)\cap G_2$.
Τότε έχουμε $\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq\hat{B}_\rho(x_1,\varepsilon_1)$

$$\hat{B}_\rho(x_2,\varepsilon_2)\subseteq G_1\cap G_2\cap U$$

$$\varepsilon_2<\frac{\varepsilon_1}{2}$$

Συνεχίζοντας με τα ίδια βήματα και τα ίδια επιχειρήματα μπορούμε επαγωγικά να βρούμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

στο X και ακολουθία $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών αριθμών ώστε

α) $0 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n/2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

β) $\hat{B}_\rho(x_1, \varepsilon_1) \supseteq \hat{B}_\rho(x_2, \varepsilon_2) \supseteq \dots \supseteq \hat{B}_\rho(x_n, \varepsilon_n) \supseteq \hat{B}_\rho(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \supseteq \dots$

γ) $\hat{B}_\rho(x_n, \varepsilon_n) \subseteq G_1 \cap \dots \cap G_n \cap U \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Από το α) προκύπτει άμεσα ότι $\lim \varepsilon_n = 0$

Από το β) η ακολουθία κλειστών συνόλων $(\hat{B}_\rho(x_n, \varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}}$

είναι φθίνουσα ενώ $diam(\hat{B}_\rho(x_n, \varepsilon_n)) \le 2\varepsilon_n \to 0$

άρα $diam(\hat{B}_\rho(x_n, \varepsilon_n)) \to 0$

Εφόσον ο (X,ρ) είναι πλήρης από το θεώρημα Cantor προκύπτει ότι υπάρχει $x\in X$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}_\rho(x_n, \varepsilon_n) = \{x\}$

Για το σημείο x, λόγω της γ) θα ισχύει

$x\in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)\cap U$ άρα $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)\cap U \neq \emptyset$

Επομένως το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό.

Φυλλάδιο 3

1) $α_1$) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο F και $x\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Τότε $f(x_n) = g(x_n) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και η f συνεχής προκύπτει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$

Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και η g συνεχής προκύπτει $g(x_n) \xrightarrow{d} g(x)$

Εφόσον $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$ και $f(x_n) \xrightarrow{d} g(x)$ προκύπτει $f(x) = g(x)$

δηλαδή $x\in F$. Συνεπώς το F είναι κλειστό.

$α_2$) Ο.δ.ο. το $G = X\setminus F$ είναι ανοικτό. Έστω $x\in G$. Τότε $f(x)\neq g(x)$

άρα $d(f(x), g(x)) > 0$. Θέτοντας $\varepsilon = \frac{1}{2} d(f(x), g(x))$

Έχουμε $\varepsilon > 0$ και $B_d(f(x), \varepsilon)\cap B_d(g(x), \varepsilon) = \emptyset$

Εφόσον η f είναι συνεχής (στο x) υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε

$f(B_\rho(x, \delta_1)) \subseteq B_d(f(x), \varepsilon)$ και εφόσον η g είναι συνεχής (στο x)

υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε $g(B_\rho(x, \delta_2)) \subseteq B_d(g(x), \varepsilon)$

Θέτοντας $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε $\delta > 0$

και $f(B_\rho(x,\delta)) \subseteq f(B_\rho(x,\delta_1)) \subseteq B_d(f(x),\varepsilon)$

$g(B_\rho(x,\delta)) \subseteq g(B_\rho(x,\delta_2)) \subseteq B_d(g(x),\varepsilon)$

Άρα για κάθε $y \in B_\rho(x,\delta)$ έχουμε $f(y) \in B_d(f(x),\varepsilon)$

και $g(y) \in B_d(g(x),\varepsilon)$

και εφόσον $B_d(f(x),\varepsilon) \cap B_d(g(x),\varepsilon) = \emptyset$

θα έχουμε $f(y) \neq g(y)$ συνεπώς $y \in X \setminus F$

Συνεπώς $B_\rho(x,\delta) \subseteq X \setminus F$.

Επομένως το $X \setminus F$ είναι ανοικτό δηλαδή το F είναι κλειστό.

β) Αφού το D είναι πυκνό ισχύει $\bar{D} = X$ ενώ αφού $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D$ έχουμε ότι $D \subseteq F$. Άρα $\bar{D} \subseteq \bar{F}$ συνεπώς $X \subseteq F$.

(2) $\forall n,m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$|\rho(x_n,y_n) - \rho(x_m,y_m)| \leq \rho(x_n,x_m) + \rho(y_n,y_m) \quad (*)$

Θ.δ.ο. η ακολουθία $(\rho(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon/2$ για $n,m \geq n_1$

Εφόσον η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(y_n,y_m) < \varepsilon/2$ για κάθε $n,m \geq n_2$

Θέτοντας $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε ότι για κάθε $n,m \geq n_0$ ισχύει $n,m \geq n_1$ και $n,m \geq n_2$ άρα $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon/2$ και $\rho(y_n,y_m) < \varepsilon/2$. Συνεπώς από την $(*)$ έχουμε

$|\rho(x_n,y_m) - \rho(x_m,y_m)| < \varepsilon$.

Άρα η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\rho(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική εφόσον ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης θα είναι συγκλίνουσα.

(3) Εφόσον το $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό ισχύει $\overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}} \neq \{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ και άρα υπάρχει $x \in \overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}$ με $x \notin \{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ δηλαδή $x_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επαγωγικά θα βρούμε ακολουθία φυσικών $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$

και $\rho(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n}$ $\forall n$

$1^{\text{ο}}$ επαγωγικό βήμα: Εφόσον $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ ισχύει
$B_\rho(x,1) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$
ώστε $\rho(x_{k_1}, x) < 1$
Γενικό επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί $k_1 < \dots < k_n$
ώστε $\rho(x_{k_n}, x) < \frac{1}{i}$ για $i = 1, \dots, n$.

Θέτουμε $\varepsilon = \min\left(\{\frac{1}{n}\} \cup \{\rho(x_j, x) : j = 1, \dots k_n\}\right)$

Εφόσον $x_j \neq x$ $\forall j$ έχουμε $\varepsilon > 0$. Εφόσον $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$
θα έχουμε $B_\rho(x,\varepsilon) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $k_{n+1} \in \mathbb{N}$
ώστε $\rho(x_{k_{n+1}}, x) < \varepsilon \leq \frac{1}{n}$

Εφόσον $\varepsilon \leq \min\{\rho(x_j, x) : j = 1, \dots, k_n\}$ θα έχουμε $k_{n+1} > k_n$
Συνεπώς $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ και εφόσον η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική
έχουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$

(4) Την έχουμε δει νωρίτερα

(5) (i) => (ii) Έστω G ανοικτό τότε το $X \setminus G$ είναι κλειστό.
Αν $G = X$ τότε για οποιαδήποτε $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχή. Θέτοντας $V = \mathbb{R}$
έχουμε $X = f^{-1}(V)$. Υποθέτω ότι $G \neq X$.
Τότε το $X \setminus G$ είναι μη κενό και κλειστό. Η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$
με $f(x) = \rho(x, X \setminus G)$ είναι καλά ορισμένη (αφού $X \setminus G \neq \emptyset$)
και συνεχής και για $x \in X$ $f(x) = 0 \iff \rho(x, X \setminus G) = 0$
$\iff x \in \overline{X \setminus G} \iff x \in X \setminus G$
δηλαδή $f^{-1}(\{0\}) = X \setminus G$ άρα $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = X - f^{-1}(\{0\}) = X \setminus (X \setminus G) =$
$= G$
(ii) => (i) Προφανώς αφού οι συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν ανοικτό σε ανοικτό.

(6) Η ρ είναι ισοδύναμη της συνήθης μετρική
Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ με $f(x) = \arctan x$

είναι ομοιομορφισμός του $\mathbb{R}$ με το $(-\pi/2, \pi/2)$ αφού η f είναι 1-1, επί, συνεχής και f^{-1} είναι συνεχής.

Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$x_n \to x \iff f(x_n) \to f(x) \iff f(x_n) - f(x) \to 0$

$\iff \arctan x_n - \arctan x \to 0 \iff |\arctan x_n - \arctan x| \to 0$

$\iff \rho(x_n, x) \to 0 \iff x_n \xrightarrow{\rho} x$

Άρα η μετρική ρ είναι ισοδύναμη της συνήθους.

Δείχνουμε τώρα ότι ο $(\mathbb{R}, \rho)$ δεν είναι πλήρης.

Η ακολουθία $x_n = n$ τείνει στο $+\infty$ άρα $f(x_n) \to \pi/2$

Εφόσον η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία του $\mathbb{R}$ είναι βασική άρα $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$

ώστε $\underbrace{|f(x_n) - f(x_m)|}_{=\rho(x_n, x_m)} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία του $(\mathbb{R}, \rho)$

όμως προφανώς δεν είναι συγκλίνουσα.

7) a) Καταρχήν εφόσον η f είναι συνάρτηση συστολής έχει μοναδικό σταθερό σημείο δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = x$

Αρκεί ν.δ.ο. το $g(x)$ είναι σταθερό σημείο της f διότι τότε, εφόσον το x είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f θα προκύψει ότι $g(x) = x$ και άρα $f(x) = x = g(x)$

Έχουμε $f(g(x)) = (f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$

b) Αν η f^k είναι συνάρτηση συστολής τότε εφόσον $f^k \circ f = f\circ f^k$ από το πρώτο ερώτημα υπάρχει μοναδικό $x\in X$ ώστε

$f^k(x) = x = f(x)$

Αν a τυχόν σταθερό σημείο της f δηλαδή $f(a) = a$

τότε $f^k(a) = a$

συνεπώς $f^k(a) = a = f(a)$ συνεπώς $a = x$

Επομένως η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο (το x)